

# Simulazione d'Esame

SCIENZE AMBIENTALI CT0583 - FISICA GENERALE a.a. 2025-26

26 Maggio, 2026

## Ex. 1 (CINEMATICA)

Dalla cima di una torre, alta 90 m, viene lasciata cadere una sferetta nello stesso istante ( $t = 0$ ) in cui viene lanciata dal suolo, verticalmente verso l'alto, una seconda sferetta con velocità iniziale  $v_0 = 30$  m/s. Calcolare: a) la distanza dal suolo alla quale si incontrano le due sferette, b) le loro velocità al momento dell'incontro.

RISOLUZIONE:

Le due sferette compiono lo stesso tipo di moto, uniformemente accelerato verso il basso con accelerazione  $g$ .

Scegliendo un asse  $y$  diretto verso l'alto e con origine al suolo, le leggi orarie sono:

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y_2 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

con  $y_0 = 90$  m,  $v_0 = 30$  m/s. Le sferette si incontrano per un  $t^*$  tale per cui  $y_1(t^*) = y_2(t^*)$ :

$$y_0 - \frac{1}{2}gt^{*2} = v_0t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} \rightarrow t^* = \frac{y_0}{v_0} = \frac{90\text{m}}{30\text{m/s}} = 3\text{s}.$$

La distanza dal suolo si trova inserendo  $t^*$  in una delle due leggi orarie, ad esempio per la sferetta-1:

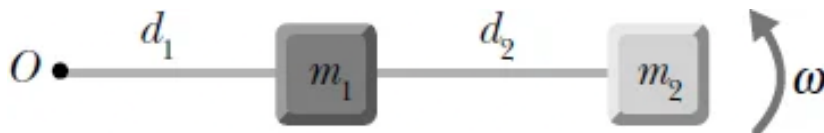
$$y_1(t^*) = 90\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 9\text{s}^2 = 45.9\text{m}.$$

Le velocità delle sfere all'impatto sono:

$$v_1(t^*) = -gt^* = -9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{s} = -29.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$
$$v_2(t^*) = v_0 - gt^* = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{s} = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## Ex. 2 (DINAMICA DEL PUNTO)

Due punti materiali, di masse  $m_1 = 8.4$  kg e  $m_2 = 10$  kg, sono collegati come in figura, con  $d_1 = 0.21$  m e  $d_2 = 0.16$  m. Il sistema, che sta in un piano orizzontale, ruota con velocità angolare costante  $\omega = 3$  rad/s attorno al punto O. Calcolare la tensione dei fili.



RISOLUZIONE:

Entrambe le masse compiono un moto circolare uniforme, con la stessa velocità angolare  $\omega$  ma raggi diversi,  $d_1$  e  $d_1 + d_2$  rispettivamente, e possiedono quindi due accelerazioni centripete diverse:

$$a_{N,1} = \omega^2 d_1$$
$$a_{N,2} = \omega^2 (d_1 + d_2)$$

Le forze agenti sulle due masse, responsabili di tali accelerazioni, sono la tensione  $T_2$  (diretta verso il centro) per  $m_2$  ed entrambe le tensioni  $T_1$  (diretta verso il centro) e  $T_2$  (diretta verso l'esterno) per  $m_1$ .

Per  $m_2$  troviamo quindi:

$$\begin{aligned} T_2 &= m_2 a_{N,2} = m_2 \omega^2 (d_1 + d_2) \\ &= 10 \text{ kg} \cdot 9 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \cdot 0.37 \text{ m} = 33.3 \text{ N} \end{aligned}$$

Per il corpo 1 vale che:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= m_1 a_{N,1} \\ \rightarrow T_1 &= T_2 + m_1 \omega^2 d_1 \\ &= 33.3 \text{ N} + 8.4 \text{ kg} \cdot 9 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \cdot 0.21 \text{ m} = 49.2 \text{ N}. \end{aligned}$$

NB: la tensione agente su  $m_1$  e diretta verso l'esterno deve essere uguale a  $T_2$  - un filo ideale non può avere tensioni diverse ai propri estremi senza deformarsi.

### Ex. 3 (GRAVITAZIONE)

Un satellite artificiale terrestre descrive un'orbita circolare di raggio  $r_1 = 9.3 \cdot 10^6$  m rispetto al centro della terra. La velocità sull'orbita è  $v_1 = 6.56 \cdot 10^3$  m/s. Calcolare: a) il valore del prodotto  $\gamma m_T$  (usando le informazioni cinematiche del satellite). Un secondo satellite descrive un'orbita circolare di raggio  $r_2 = 8.1 \cdot 10^6$  m. Calcolare: b) quanto deve valere il rapporto tra la massa  $m_2$  del secondo satellite e la massa  $m_1$  del primo satellite affinché l'energia meccanica dei due satelliti sia eguale.

RISOLUZIONE:

Uguagliando la forza gravitazionale alla forza centripeta:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{m_T m_1}{r_1^2} &= m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \\ \rightarrow \gamma m_T &= r_1 v_1^2 = 9.3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 6.56^2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \simeq 4 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} = 4 \cdot 10^{14} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \end{aligned}$$

L'energia totale è data dal contributo cinetico ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) più quello potenziale ( $-\gamma \frac{m_T m}{r}$ ), dove  $m_T$  è la massa della Terra,  $m$  è la massa del satellite,  $r$  è il raggio dell'orbita e  $v$  è la velocità del satellite.

Dall'uguaglianza delle forze gravitazionale e centripeta otteniamo che vale:

$$v^2 = \gamma \frac{m_T}{r}$$

L'energia meccanica di un satellite vale quindi:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{m_T m}{r} = \frac{1}{2}m\gamma \frac{m_T}{r} - \gamma \frac{m_T m}{r} = -\gamma \frac{m m_T}{2r}$$

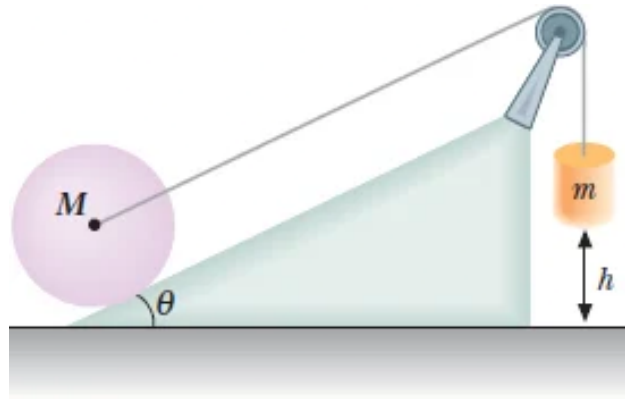
Imponendo che i due satelliti abbiano la stessa energia:

$$\begin{aligned} -\gamma \frac{m_1 m_T}{2r_1} &= -\gamma \frac{m_2 m_T}{2r_2} \\ \rightarrow \frac{m_2}{m_1} &= \frac{r_2}{r_1} = \frac{8.1 \cdot 10^6 \text{ m}}{9.3 \cdot 10^6 \text{ m}} = 0.87. \end{aligned}$$

### Ex. 4 (CORPO RIGIDO)

Un disco di massa  $M = 8$  kg e raggio  $R$  è posto sopra una guida inclinata con angolo  $\theta = 30^\circ$ ; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa  $m = 6$  kg. Il filo è teso con la massa  $m$  bloccata a distanza  $h = 1.5$  m dal suolo. All'istante  $t = 0$  si lascia libera la massa  $m$  che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo la guida. Il moto del disco è di puro rotolamento. Il momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il suo centro vale  $I = \frac{1}{2}MR^2$ .

Calcolare:



1. l'accelerazione con cui scende la massa  $m$  ;
2. la velocità con cui la massa  $m$  tocca il suolo;
3. la quota massima raggiunta dal centro del disco, misurata rispetto alla quota che lo stesso centro aveva per  $t = 0$ .

RISOLUZIONE:

1) La seconda legge di Newton per il corpo di massa  $m$  e'

$$mg - T = ma$$

Per il disco (moto di puro rotolamento con forza costante applicata all'asse: la tensione  $T$ ), le forze agenti sul centro di massa si scompongono in:

$$\text{asse} // \text{ al piano} : T - Mg \sin\theta - f = Ma$$

$$\text{asse} \perp \text{ al piano} : N = Mg \cos\theta$$

Inoltre, per il disco, scelto il suo centro come polo, vale:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{f} = I\alpha \Rightarrow Rf = I \frac{a}{R} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} \Rightarrow f = \frac{1}{2}Ma$$

Risolvendo il sistema di 3 equazioni in 3 incognite ( $T$ ,  $f$ ,  $a$ ) si trova:

$$a = \frac{2g(m - M \sin\theta)}{3M + 2m} = 1.09 \frac{m}{s^2}$$

$$T = mg - ma = 52.3N$$

$$f = \frac{1}{2}Ma = 4.36N$$

2) Partendo da fermo, la massa cade con un'accelerazione pari ad  $a$ , arrivando a terra con una velocità  $v$ :

$$h = \frac{1}{2}at^2$$

$$v = at = a\sqrt{2h/a} = \sqrt{2ah} = 1.81 \frac{m}{s}$$

NB: non sarebbe corretto un bilancio energetico tra energia potenziale ed energia cinetica per la sola massa  $m$  (che darebbe  $v = \sqrt{2gh}$ ), perchè la sua energia potenziale si trasforma sia in energia cinetica della massa  $m$  stessa che in energia del disco (traslazionale, rotazionale e potenziale).

3) Durante la sua caduta la massa  $m$  scende di  $h = 1.5$  m. Poiché il filo è teso, il disco percorre la stessa distanza  $h = 1.5$  m lungo il piano inclinato. La variazione di quota verticale del centro del disco in questa fase vale quindi:

$$\Delta z_1 = h \sin\theta = 1.5 \cdot \sin(\pi/6) = 0.75 \text{ m}$$

Quando la massa tocca terra il disco possiede la stessa velocità  $v = 1.81$  m/s della massa (perchè il filo non si allunga e non si accorcia durante il moto). Il filo si allenta e non esercita più alcuna tensione. Il disco, tuttavia,

continua a salire lungo il piano grazie alla sua energia cinetica, decelerando sotto l'effetto della componente della gravità finché non si ferma. Usiamo la conservazione dell'energia meccanica del solo disco per questa seconda fase, durante la quale l'energia cinetica si trasforma in potenziale:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\Delta z_2$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = Mg\Delta z_2$$

$$\Delta z_2 = \frac{3v^2}{4g} = 0.25m$$

Il disco sarà salito di quota  $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = 0.75m + 0.25m = 1.0m$

## Ex. 5 (FLUIDI)

Un pallone idrostatico, di volume  $V = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^3$ , riempito con aria calda di densità  $\rho_c = 0.95 \text{ kg/m}^3$ , è circondato da aria fredda di densità  $\rho_f = 1.35 \text{ kg/m}^3$ . Calcolare il carico massimo  $m$ , comprensivo del materiale del pallone, sollevabile.

RISOLUZIONE:

Il pallone idrostatico potrà sollevare un carico di massa  $m$ , se il modulo della spinta di Archimede è maggiore (al limite uguale) del modulo della forza peso totale (aria contenuta nel pallone + carico),  $F_A \geq P$ , ossia:

$$\rho_f V g \geq (\rho_c V + m)g$$

Il valore massimo di  $m$  è quello corrispondente all'uguaglianza :

$$m = (\rho_f - \rho_c)V = 800 \text{ kg}$$

## Ex. 6 (TERMODINAMICA)

$n = 1.2 \text{ mol}$  di gas ideale biatomico ( $c_v = \frac{5}{2}R$ ,  $\gamma = \frac{7}{5}$ ) sono rinchiusi in un contenitore adiabatico di volume  $V$ ; la temperatura è  $T = 273.15 \text{ K}$ . Con una compressione adiabatica reversibile il volume del gas viene ridotto a  $V/5$ . Successivamente, rendendo diatermica una parete del contenitore, il gas è posto a contatto termico con un grande serbatoio contenente una miscela di acqua e ghiaccio (calore latente di fusione è  $\lambda = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ ) alla temperatura di fusione  $T$  e raggiunge, restando a volume costante, uno stato di equilibrio. Calcolare: a) la massa di ghiaccio che fonde, b) le variazioni di energia interna del gas e della miscela acqua+ghiaccio.

RISOLUZIONE:

a) Per un'adiabatica reversibile vale la relazione  $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$ . La temperatura finale  $T_B$ :

$$T_B = T_A \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = 273.15 \cdot 5^{\frac{2}{5}} \approx 520.0 \text{ K}$$

Il gas viene posto a contatto con il ghiaccio a  $T_C = T_A = 273.15 \text{ K}$ . Essendo una trasformazione isocora (a volume costante) irreversibile, il gas cede alla miscela una quantità di calore il calore:

$$Q_{gas} = nc_v(T_C - T_B) = 1.2 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (273.15 - 520.0) \text{ K} = -6157 \text{ J}$$

Il segno meno indica che il gas cede calore. Questo calore viene assorbito interamente dal ghiaccio per fondere. La massa di ghiaccio che fonde è:

$$m = \frac{Q}{\lambda} = \frac{6157 \text{ J}}{3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} = 0.0187 \text{ kg}$$

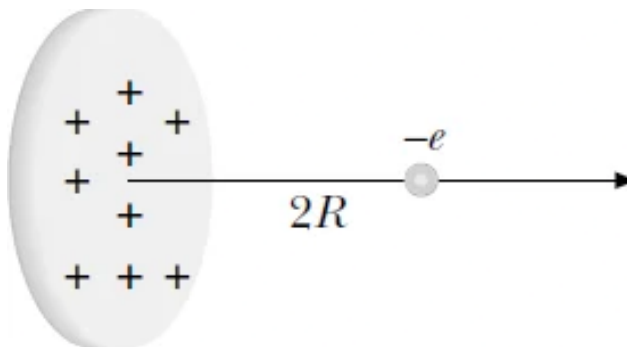
b) Per il **gas**: poiché lo stato finale  $C$  ha la stessa temperatura dello stato iniziale  $A$  ( $T_C = T_A$ ), la variazione totale di energia interna del gas nel percorso  $A \rightarrow B \rightarrow C$  è nulla:  $\Delta U_{gas} = nc_v(T_C - T_A) = 0$ .

Per la **miscela** di acqua e ghiaccio, che non compie/subisce lavoro ( $W=0$ ), dal primo principio della termodinamica si ha  $\Delta U_{miscela} = Q - W = Q = +6157 \text{ J}$

## Ex. 7 (ELETTROSTATICA)

Sull'asse di un disco di materiale isolante di raggio  $R = 10$  cm, uniformemente carico con carica  $q = 2.5 \cdot 10^{-8}$  C, è posto in quiete un elettrone a distanza  $x = 2R$  dal centro O del disco. Calcolare la velocità  $v_e$  con cui l'elettrone arriva al centro del disco quando viene lasciato libero, sapendo che la formula del potenziale a distanza  $x$  dal centro del disco vale:

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$



RISOLUZIONE:

A distanza  $2R$  l'energia dell'elettrone sarà solamente potenziale elettrostatica, e vale:

$$U_{in} = -eV(x = 2R) = -\frac{e\sigma}{2\epsilon_0}R(\sqrt{5} - 2)$$

Quando l'elettrone arriva a  $x=0$ , l'energia sarà:

$$E_k + U(x = 0) = \frac{1}{2}m_e v_e^2 - eV(x = 0) = \frac{1}{2}m_e v_e^2 - \frac{\sigma e R}{2\epsilon_0}$$

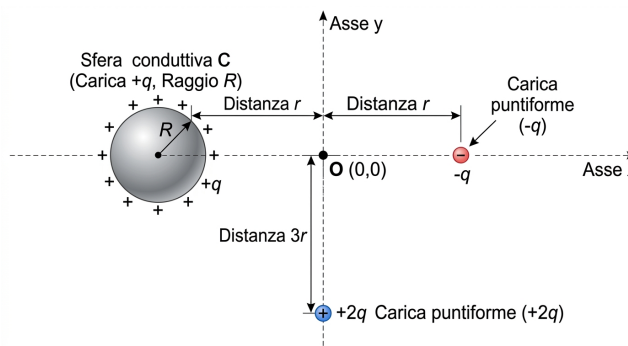
da cui, con  $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ :

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{e\sigma R}{2\epsilon_0} (1 - \sqrt{5} + 2) = \frac{e\sigma R}{2\epsilon_0} (3 - \sqrt{5}) = \frac{eq}{2\pi\epsilon_0 R} (3 - \sqrt{5})$$

$$v_e = \sqrt{\frac{eq}{\pi\epsilon_0 R m_e} (3 - \sqrt{5})} = 3.5 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

## Ex. 8 (POTENZIALE ED ENERGIA ELETTROSTATICA)

Sia data una sfera conduttiva e due cariche puntiformi come in figura. Le distanze sono tali per cui si può trascurare l'induzione elettrostatica. Calcolare: a) il potenziale elettrostatico in O, b) l'energia di interazione del sistema (tralasciare l'energia necessaria per caricare il conduttore).



RISOLUZIONE:

I potenziali si sommano. Il potenziale della sfera è dato da  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  (come se fosse una carica puntiforme); il potenziale della carica negativa è dato da  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r}$ ; il potenziale della carica  $2q$  è dato da  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{3r}$ . Il potenziale in O pertanto è:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{3r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{3r}.$$

L'energia di interazione del sistema è la somma delle energie di interazione di tutte le coppie possibili,  $\sum_{i \neq j} q_i V_{ji}$  (usare il fattore 1/2 se si considerano entrambe le coppie 1-2 e 2-1, altrimenti no):

- Coppia 1-2: sfera (+q) e carica a destra (-q).
- Coppia 1-3: sfera (+q) e carica in basso (+2q).
- Coppia 2-3: carica a destra (-q) e carica in basso (+2q).

Calcoliamo le distanze:

- $d_{12} = 2r$
- $d_{13} = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10}$
- $d_{23} = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10}$

L'energia di interazione del sistema è:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q)(-q)}{2r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q)(2q)}{r\sqrt{10}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)(2q)}{r\sqrt{10}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2r}$$

## Ex. 9 (CORRENTE ELETTRICA)

Un pannello fotovoltaico può essere considerato come un generatore di f.e.m con una resistenza interna  $r$ . Quando è collegato ad una resistenza  $R_1 = 250\Omega$ , la differenza di potenziale ai suoi capi è  $V_1 = 0.15V$ ; quando è connesso con una resistenza  $R_2 = 500\Omega$  la d.d.p. è  $V_2 = 0.2V$ . Calcolare: a) la resistenza  $r$  del pannello, b) la sua f.e.m., c) la corrente che scorre nel circuito nei due casi.

RISOLUZIONE:

La resistenza interna  $r$  è in serie con la resistenza esterna  $R$ . La corrente  $i$  che scorre nel circuito è data da:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

La differenza di potenziale  $V$  misurata ai capi della resistenza è:

$$V = i \cdot R = \frac{\mathcal{E} \cdot R}{r + R}$$

Abbiamo quindi il sistema nelle due incognite  $(\mathcal{E}, r)$ :

$$V_1 = \frac{\mathcal{E} \cdot R_1}{r + R_1}$$

$$V_2 = \frac{\mathcal{E} \cdot R_2}{r + R_2}$$

che risolto dà:

$$r = 250 \Omega$$

$$\mathcal{E} = 0.3 V$$

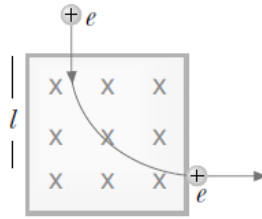
La corrente vale:

$$i_1 = V_1/R_1 = 0.15V/250\Omega = 0.0006 A$$

$$i_2 = V_2/R_2 = 0.20V/500\Omega = 0.0004 A$$

## Ex. 10 (MAGNETISMO)

Un fascio di protoni, accelerato da una d.d.p.  $V = 7 \text{ MV}$ , deve essere curvato di  $90^\circ$ . Se la curvatura deve avvenire in un tratto di lunghezza  $l = 1.5 \text{ m}$ , calcolare: a) il valore del campo magnetico  $B$  necessario e b) il lavoro compiuto dalla forza magnetica, c) il lavoro della forza elettrostatica per accelerare i protoni.



RISOLUZIONE:

a) Il fascio viene accelerato da una differenza di potenziale  $V$ . L'energia potenziale elettrica  $U_e$  si trasforma integralmente in energia cinetica  $E_k$ :

$$eV = \frac{1}{2}m_p v^2 \implies v = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 7 \cdot 10^6}{1.67 \cdot 10^{-27}}} \text{ m/s} \approx 3.66 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Affinché il fascio di protoni possa uscire in direzione orizzontale è necessario che il raggio della traiettoria sia uguale a  $l$ . Uguagliando la forza di Lorentz e forza centripeta:

$$ev_p B = \frac{m_p v_p^2}{l} \implies B = \frac{m_p v_p}{el} = 0.4 \text{ T}$$

b) Il lavoro è nullo perchè la forza di Lorentz è perpendicolare allo spostamento,  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos(\pi/2) = 0$ . Il lavoro di una forza centripeta è sempre nullo per un moto circolare (la forza è perpendicolare allo spostamento).

c) Il lavoro della forza elettrostatica è  $W = eV = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ V} = 1.12 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 7 \text{ MeV}$

COSTANTI:

- $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
- $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
- $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$
- $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$